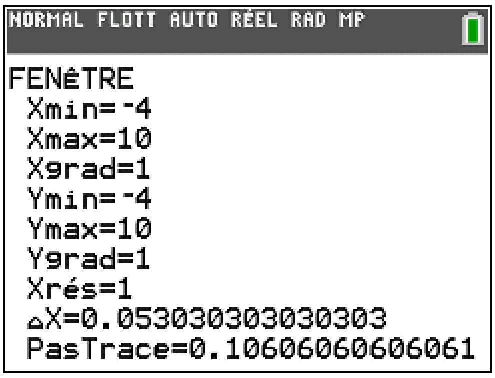
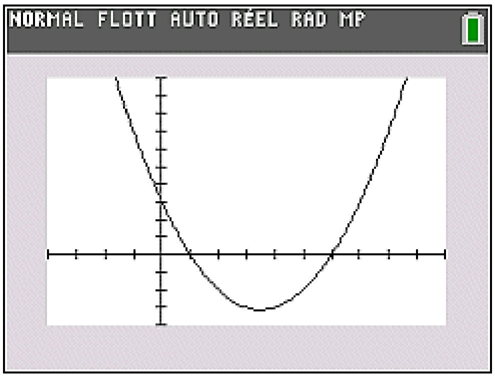
$1^{ère}$ Maths CS2 6 nov. 2023 15 min Calculatrice en mode Exam Thiaude P.

NOM = **Prénom =**

<u>Exercice 1</u> [5 pts] Q.C.M.

On donne ci-dessous la parabole représentative d'une certaine fonction f polynôme du second degré : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$.





Par lecture graphique répondre aux questions :

- ☐ $a < 0$ ☐ $a = 0$ ☐ $a > 0$
- ☐ $c = 1$ ou $c = 6$ ☐ $c = 3$ ☐ on ne peut pas savoir
- ☐ $b^2 < 4ac$ ☐ $b^2 = 4ac$ ☐ $b^2 > 4ac$
- solution(s) de l'équation $f(x) = 0$:
  ☐ 3 ☐ 1 et 6 ☐ environ (-3)
- ☐ $f(2) < 0$ ☐ $f(2) = 0$ ☐ $f(2) > 0$

<u>Exercice 2</u> [8 pt]

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $-2x^2 + 5x + 3 < 0$.

<u>Exercice 3</u> [7 pts] le nombre de poignées de mains

À la fin d'une réunion chacun des participants serre la main à chacun des autres : on compte 120 poignées de mains ; on souhaite retrouver le nombre n de participants.

1. On numérote les participants de 1 à n. À la poignée de main entre les participants i et j correspond deux couples mathématiques : (i, j) et (j, i) où $i \neq j$. Expliquer pourquoi il y a : $n(n-1)$ couples mathématiques, en déduire que n vérifie : $\frac{n(n-1)}{2} = 120$ $(*)$.

2. Le programme Python suivant permet de trouver le nombre de participant sachant que n vérifie l'égalité $(*)$:

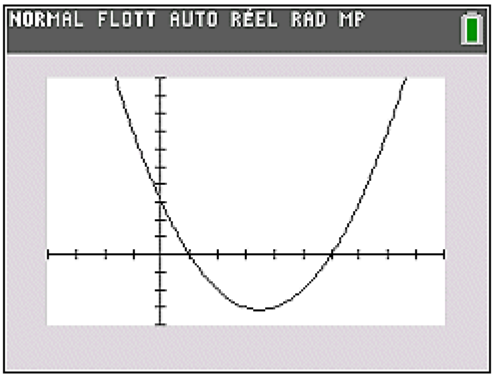
```
1 for k in range(1,121):
2     if 
3         print("Nombre de participants =", )
```

Écrire **<u>sur la copie</u>** la ligne 2 en la complétant exactement comme elle doit être tapée en Python.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\frac{x(x-1)}{2} = 120$, en déduire n.

Corrigé

Exercice 1



- ☐ $a < 0$ ☐ $a = 0$ ☒ $a > 0$

explication : parabole « sourire »

- ☐ $c = 1 \; ou \; c = 6$ ☒ $c = 3$ ☐ on ne peut pas savoir

explication : $f(0) = a(0)^2 + b(0) + c = c$, or sur la courbe $f(0) = 3$ donc $c = 3$

- ☐ $b^2 < 4ac$ ☐ $b^2 = 4ac$ ☒ $b^2 > 4ac$

explication : $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisse en deux points, donc $f(x) = 0$ admet deux solutions réelles distinctes donc $ax^2 + bx + c$donc $\Delta > 0$ i.e. $b^2 - 4ac > 0$, $b^2 > 4ac$

- solution(s) de l'équation $f(x) = 0$:

  ☐ 3 ☒ 1 et 6 ☐ environ (-3)

explication : le solutions de $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de l'axe des abscisses obtient par lecture graphique pour abscisses de ces points 1 et 6

- ☒ $f(2) < 0$ ☐ $f(2) = 0$ ☐ $f(2) > 0$

explication : $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 2 est « sous » l'axe des abscisses donc son ordonnées $f(2)$ est strictement négative

Exercice 2 **[8 pt]**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $-2x^2 + 5x + 3 < 0$

$-2x^2 + 5x + 3$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -2$, $b = 5$ et $c = 3$, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4(-2)(3) = 25 + 24 = 49$

$\Delta > 0$ donc il y a deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{49}}{2(-2)} = \frac{-5 - 7}{-4} = \frac{-12}{-4} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + \sqrt{49}}{2(-2)} = \frac{-5 + 7}{-4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

Règle : « $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines ».

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$-2x^2 + 5x + 3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On souhaite que : $-2x^2 + 5x + 3 < 0$, d'où : $S = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]3\,; +\infty\right[$.

Exercice 3 **nombre de poignées de mains**
120 poignées de mains : on souhaite retrouver le nombre n de participants

1. **On numérote les participants de 1 à n, à la poignée de main entre les participants i et j correspond deux couples mathématiques : (i, j) et (j, i) où $i \neq j$. Expliquer pourquoi il y a : $n(n-1)$ couples mathématiques, en déduire que n vérifie : $\frac{n(n-1)}{2} = 120$ $(*)$.**
Comptons le nombre de couples (i, j) avec $i \neq j$: il y a n choix pour i et chacun d'entre eux laisse $n-1$ choix pour j donc il y a $\underbrace{(n-1)+\cdots+(n-1)}_{n \text{ termes}}$ couples avec $i \neq j$
c'est-à-dire : $n \times (n-1)$ couples avec $i \neq j$, autrement dit $n(n-1)$ couples avec $i \neq j$.
Or une poignée de mains de l'élève numéro i avec l'élève de numéro j correspond à deux couples (i, j) et (j, i),$i \neq j$, on en déduit qu'il y a deux fois moins de poignées de mains que de couples (i, j), $i \neq j$ donc il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ poignées de mains, or onsait qu'il y a 120 poignées de main donc on a bien : $\frac{n(n-1)}{2} = 120$.

2. (version complète du programme)

```
1 for k in range(1,121):
2     if k*(k-1)/2==120:
3         print("Nombre de participants =",k)
```

Ligne numéro 2 : « `if k*(k-1)/2==120:` »
Le symbole « // » donne le quotient d'une division euclidienne, alors que $\frac{k(k-1)}{2}$ est le quotient d'une division décimale, donc le « // » est ici illogique, il est refusé même son utilisation permettrait au programme d'afficher la bonne valeur de n.

3. **Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\frac{x(x-1)}{2} = 120$. Combien y avait-il de participants ?**
$$\frac{x(x-1)}{2} = 120 \Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{2} \times 2 = 120 \times 2 \Leftrightarrow x(x-1) = 240 \Leftrightarrow x^2 - x - 240 = 0$$
$x^2 - x - 240$ est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 1$, $b = -1$ et $c = -240$, de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-240) = 1 + 960 = 961$.
$\Delta > 0$ donc il y a deux racines réelles distinctes :
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+1-\sqrt{961}}{2(1)} = \frac{1-31}{2} = \frac{-30}{2} = -15$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+1+\sqrt{961}}{2(1)} = \frac{1+31}{2} = \frac{32}{2} = 16$$
L'équation admet deux solutions dans $\mathbb{R}$: -15 et 16.
Le nombre de participants est un entier naturel, or $-15 \notin \mathbb{N}$ donc **il y a 16 participants**.